PROBLEMAS EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

HUMBERTO ALAGIA

I. Introducción. El título de esta charla tiene una ambigüedad incorporada. "Problemas en Educación Matemática"se refiere a la disciplina que investiga y estudia problemas relacionados con la educación matemática y así el uso de mayúsculas y minúsculas es pertinente aunque a veces fastidioso. Pero los problemas del título son de dos tipos. Uno se refiere a qué cosas se consideran problemas de investigación en la disciplina, a algunos criterios que permiten aproximar una caracterización de tales problemas. El otro tipo de problemas tienen que ver más específicamente con la identidad de esta disciplina, cómo se relaciona con otras disciplinas y cómo se relacionan entre sí las diferentes áreas dentro de la disciplina.

Como es usual hacerlo, hay que decir la Educación Matemática es una disciplina hasta cierto grado incipiente. Como lo dice el título de una importante publicación reciente, hay una búsqueda de la identidad que embarca a muchos, quizá a la mayoría de los estudiosos del área. Esta búsqueda de la identidad es quizá el hilo que une, hasta cierto punto, la colección de reflexiones que expondremos en estas notas.

La producción de artículos de Educación Matemática es enorme, la calidad dispar. Esto, por supuesto, no sorprende y ocurre en todos lados. La identificación de resultados y de su validez no está aun bien definida. Ese es un problema mayor de investigación en el área. Es común que uno se pregunte, frente a un artículo si es o no de Educación Matemática, una pregunta diferente de si es o no un buen artículo. Respecto de los proyectos de investigación se plantean los mismos interrogantes. También, hasta cierto punto, las reflexiones que siguen proveen alguna perspectiva sobre este tema.

Los problemas prácticos de la enseñanza y del aprendizaje de la matemática involucran de manera casi exclusiva a quienes son encargados directos de pilotear el proyecto social de enseñanza. Los/as docentes, en todos los ámbitos (elemental, secundario, universitario) somos responsables directos. La formación de docentes es así de gran importancia (formación de docentes se usa en sentido amplio y no sólo a enseñantes primarios y secundarios.) Sobre esto, en este sentido general, también pretendemos llegar con estas reflexiones.

Una disciplina en búsqueda de la identidad tiene, con razón, problemas con el nombre. Aquí indicamos solamente que Didáctica de la Matemática es comúnmente usado, en vez de Educación Matemática. En las épocas más recientes tiende a referir a una teoría y perspectiva específicas, la de la *didactique* francesa. En general, entonces, utilizaremos el nombre del título pero tampoco evitaremos la palabra didáctica.

II. Algunos problemas. 1. El problema fundamental de le educación matemática es la dificultad que la gente en general y los usuarios en particular tienen para comprender la matemática. No hay que referirse a cosas complicadas, cualquier concepto matemático no es fácilmente comunicable. Y cuando un supuesto aprendiz lo aprende tampoco es muy claro lo que aprendió. Este es entonces un problema de investigación en Educación Matemática. Las preguntas son fáciles de formular y, aparentemente, imposibles de contestar. ¿Cuál es la idea de número imaginario que prevalece entre aquellos que digamos tomaron un curso de funciones de variable compleja en algún nivel? ¿Es cierto que la gente considera que $\sqrt{-1}$ es un número en el mismo sentido que un matemático? La biografía de un número (en el sentido de Confrey:

“Queremos afirmar que los números tienen ‘biografías’ y que su carácter está inherentemente ligado con la forma en fueron construidos. Así podemos pensar que una interacción entre el tipo de número (razón, decimal, fracción, entero) y una operación es una expectativa razonable por parte de los estudiantes.”)

es diferente para cada persona y eso influye en el sentido[1] .

También recordamos los resultados de Schoenfeld y otros sobre la comprensión del plano cartesiano: el gráfico de una función, la representación de puntos en el plano son de difícil acceso; la identificación de ecuaciones con gráficos es un complejo problema de aprendizaje. (Ver el trabajo reciente de Arcavi.)

2. Una noción aceptada con frecuencia es que existe alguna forma de convencer a la gente, no ya de la necesidad pero sí de la belleza de la matemática. Un enfoque generalizado, una manera de manejar esta noción en la práctica, es tomar el corpus de la matemática y mostrarlo. Por exposición, se especula, resultará la apreciación de la belleza. Esta manera está detrás de la mayoría de las soluciones basadas en la difusión de la matemática por los matemáticos entre los no matemáticos. Otro enfoque es más reciente y tiene que ver con la praxis de la comunidad matemática que es, claramente, enriquecedora y bella para sus actores. En vez del corpus se trata de exponer a la gente a la práctica misma. Este enfoque tiene varias expresiones pero en sus versiones más coherentes tiene que ver con la concepción de 'la matemática como una ciencia' y no exclusivamente una disciplina lógico-deductiva. Esta es una posición filosóficamente sofisticada y a veces polémica. Es importante en Educación Matemática. La imprecisión de lo dicho no obvia su importancia. Queremos decir que en áreas como esa están los problemas de Educación Matemática. Sin más, lo planteado refiere a cuestiones profundas de significado y formalismo, por ejemplo.

III. Propósitos. Como señala Schoenfeld, la investigación en Educación Matemática tiene dos propósitos principales, uno puro, el otro aplicado.

- Puro (Ciencia básica): Comprender la naturaleza del pensamiento, aprendizaje y enseñanza matemáticos.
- Aplicado (Ingeniería): Usar tales comprensiones para mejorar la instrucción en matemática.

[1]Significado y sentido han sido estudiados entre otros por Frege en *Sinn und Bedeutung*. También ver el trabajo de Dubinsky

Los dos propósitos son igualmente importantes. Sin un conocimiento de la parte básica no es esperable avanzar mucho en las aplicaciones. [Una comparación con la medicina es fructífera, como lo hace Schoenfeld. Por su parte Brousseau hace una comparación con la economía].

El conocimiento básico tiene interés intrínseco por un lado; por el otro da fundamentos y refuerza al trabajo aplicado.

Es importante entender esto propósitos duales. Contrastan fuertemente con el único propósito que se atribuye a la investigación en Educación Matemática desde la perspectiva de muchos educadores matemáticos, que es contestar a la pregunta "¿Qué es lo que funciona en el aula?". En cambio una pregunta diferente es "¿Cómo funciona un saber en el aula?" Más allá de la importancia de los resultados útiles y más allá de que la utilidad es motivadora de gran parte del trabajo educativo, es un error pensar que las aplicaciones directas (desarrollo curricular, 'pruebas' de la eficacia de ciertos tipos de instrucción, etc.) son la cuestión fundamental de la investigación en Educación Matemática[2] .

Conviene mantener clara la diferencia entre docencia e investigación en educación matemática. Resaltemos que muchas de las discusiones sobre el dictado de un curso o sobre la marcha de un plan de estudios no son, normalmente de Educación Matemática, sino de *educación matemática*. Esto no es un juego de palabras, nos referimos a los criterios empíricos usuales que uno aplica en la docencia tales como elegir un libro de texto, confeccionar un conjunto de ejercicios.

Una observación importante es darse cuenta de que la investigación en Educación Matemática (en el ámbito universitario de grado) es un emprendimiento *muy* diferente de la investigación en matemática y que una comprensión de las diferencias es esencial si queremos apreciar (o, mejor aun, contribuir a) el trabajo en este campo. En Educación Matemática los resultados son raramente definitivos; son, usualmente, sugerentes. La evidencia no es del mismo orden que una demostración,

[2]Las polémicas que esto genera no son inútiles. El caso de Freudenthal y de su exposición en el ICME 4 de Berkeley en 1983, "Major Problem in Mathematics Education" fijó una agenda de investigación en educación matemática pero él mismo 'no pensaba bien' de la Educación Matemática.

pero es acumulativa, tiende hacia conclusiones que están más allá de dudas razonables. Un enfoque científico es posible, pero debe tenerse cuidado de no confundir – lo que cuenta no es tanto lo más típico de la ciencia, tales como el método experimental, sino el uso del razonamiento y estándares de evidencia cuidadosos, empleando una amplia variedad de métodos para la tarea entre manos.

Aquí se distingue, por un lado, entre rigor y rigor matemático; por el otro sobre la conveniencia de no aferrarse siempre a un método (lo señalan varios autores tales como Kilpatrick, Sierpinska, Schoenfeld y, recientemente, Arcavi).

Brousseau expresa sus ideas sobre el estudio sistemático de los fenómenos que aparecen en la enseñanza de la matemática (que está en el título de su tesis) cuando expresa que pretende hacer una 'teorización' de ellos; el resultado es la llamada 'Teoría de situaciones'. En una entrevista televisada (Córdoba, Agosto 1996) contestó así a una pregunta sobre esos fenómenos: "Sin dudas hace falta una ciencia. Pienso que, como en la economía, esto no se hará rápidamente... pero debe buscarse, investigar, comprender cómo funcionan."

Comprender como funcionan esos fenómenos tiene varios aspectos. Uno lo señala en la misma fuente Brousseau:

"Es éste exactamente el problema de la didáctica, y *no es fácil*: cuáles son las condiciones que hacen que un saber pueda ir de una institución a otra, cuáles son las condiciones de difusión de los saberes". (énfasis agregado)

No importa a qué enfoque uno adhiera, esta definición es suficientemente abarcativa. Notemos que la matemática para no matemáticos es un problema de ese tipo.

IV. Matemática para qué y para quienes. Las dificultades que encuentran enseñantes y enseñados por igual cuando convergen en la matemática seguramente no son exclusivas, es claro que cualquier tema de la enseñanza y del aprendizaje plantea serias dificultades. Por causas que no consideraremos aquí, el caso de la matemática es motivo de preocupaciones especiales. Su importante presencia en el curriculum en todos los niveles de enseñanza hace que la preocupación esté muy difundida. Lo poco exitosa que han sido las soluciones para enfrentar las dificultades están produciendo propuestas de modificaciones drásticas que incluyen una significativa reducción de cuánta matemática se considera adecuada. Se dice, por ejemplo, que hay que enseñar la matemática que sea demandada por los presuntos usuarios. (La discusión sobre el 'programa de Harvard' viene a colación) Si alguien quiere usar una calculadora se le enseña exactamente eso. Estas tendencias afectan el sustento cultural de la presencia de la matemática como objeto para aprender. Históricamente la matemática se enseña porque es parte del legado cultural y no sólo porque es útil. Ocurre que la utilización de la matemática por la gente es menor que lo pueda aparecer. Distinto es el asunto de la presencia de la matemática en variedad de lugares y objetos para cuya construcción fue elemento esencial. Lo que Noss llama la visibilidad de los significados matemáticos es claramente básica. Pero lo que llamamos preocupación cultural es distinta pero no totalmente. H. Wu la plantea bien cuando se pregunta si con la matemática presente en la escuela alguien puede llegar a comprender la importancia que la prueba del Teorema de Fermat tiene en la historia de las ideas y de la cultura. Lo bueno de este planteo es que no es específico de la matemática, se aplica a otras disciplinas.

La enseñanza de la matemática para no-matemáticos es una de las cuestiones centrales que preocupan a quienes investigan en Educación Matemática y en Didáctica de la Matemática. También es una cuestión que desvela a los matemáticos tanto para diseñar cursos como para enseñarlos. Conviene anotar algo que por conocido puede pasar desapercibido: *la mayor parte de la enseñanza de la matemática está dirigida a individuos que no serán matemáticos profesionales*. La enseñanza es, por un lado, la general de la escuela preuniversitaria o si no la dirigida a futuros usuarios, aquellos que no serán matemáticos profesionales. Por supuesto se enseña matemática para futuros matemáticos y al menos en la universidad el diseño es dominante. Otra vez Wu señala: "...tenemos que ampliar nuestra visión sobre la enseñanza de la matemática [...], dedicarnos a la cuestión más amplia y más complicada de educar estudiantes que tienen diversos objetivos de vida". Y agrega: "[Pero] enseñamos casi todos nuestros cursos como si todos nuestros estudiantes fueran a tomar cursos de postgrado. "Esto es totalmente absurdo [...] es una horrible aplicación errónea de nuestra autoridad". Esta última afirmación debe destacarse, la comunidad matemática tiene naturalmente autoridad, la cuestión es como se ejerce.

La situación descripta plantea un dilema sobre el cual queremos reflexionar. El dilema es teóricamente mucho más profundo que sus consecuencias prácticas. Se trata de la existencia de 'diferentes matemáticas', que son las "matemática para...": para físicos, para biólogos, para economistas, para agrónomos, y así puede seguirse; también está la 'matemática de la educación matemática', que podemos ilustrar al pensar qué matemática conviene o deben estudiar y conocer los profesores de matemática.

Dado que existe una disciplina bien establecida que se llama matemática y dado que sin duda hay usuarios no matemáticos en otras disciplinas puede parecer que el problema es uno de decisión a partir de una lista de recursos matemáticos útiles o necesarios para cada una de las otras áreas. Es probable que siempre la cuestión se resuelva según este esquema: las demandas de la otra profesión son especificables y los matemáticos, una vez identificadas, las satisfacen.

La realidad no es tan simple y con este esquema se obtienen aproximaciones que, según las circunstancias, son mejores o peores.

Si pretendemos un público culto después de la escuela ¿cuanto debe entender de una expresión, ahora corriente como 'tal gen codifica para una dada proteína'? Y la complicada estructura geométrica de cadenas de ADN o de moléculas ¿requiere de algún conocimiento o familiaridad con la geometría?. Esta línea de argumentación tiende rápidamente a otra pregunta general y pertinente: la necesidad de la matemática como parte del conocimiento que se espera de 'todo el mundo'. Planteamos esta pregunta cuando hay, como dijimos al principio, una incipiente inclinación a pensar que se necesita poco.

Esta pregunta toma forma si pensamos que no está aislada, hay otras partes del conocimiento cultural que no tienen respuesta clara para ella, por ejemplo la música y la poesía. Por supuesto la cuestión de siempre es si pretendemos enseñar una disciplina para la generalidad, si la introducimos dentro del proyecto social de enseñanza, ¿cuánto parecido debe tener con la disciplina de referencia?.

En 1992 Dubinsky planteaba esta cuestión de manera muy perceptiva y resaltando las dificultades:

"[Al discutir] sobre el pensar matemático, y en particular con gran interés en la educación matemática se plantea una cuestión muy importante y es una sobre la cual no sé mucho. La pregunta es ¿hay un tipo de conocimiento matemático o hay dos?. Lo que preocupa a la mayoría de los matemáticos profesionales es la continuación de la especie: la educación y producción de matemáticos de primer nivel, gente que, desde el comienzo, son muy talentosos en matemática. Una segunda preocupación, quizá la fundamental para educadores matemáticos, es la del alfabetismo matemático – el aumento de la comprensión matemática entre la población en general que será necesario en el futuro. Estas son dos cuestiones fundamentales. En el contexto de esta situación lo que hay que preguntar es: ¿cuáles son las conexiones entre las dos? ¿Hasta que punto son iguales? ¿Dónde son realmente preguntas diferentes? [...] Necesito saber más sobre que es realmente el conocimiento matemático [...] es parte de la agenda a largo plazo."

Aquí aparece algo propio, particular de la matemática. Las características esenciales de la matemática surgen 'al principio', tanto sus objetos de estudio como sus métodos. (Esto es claro en la enseñanza universitaria[3]). Por eso, quizá la matemática aparece como más problemática respecto de otras disciplinas. Las aproximaciones a la matemática no son simples, no al menos en la escolaridad obligatoria. Recordemos sin embargo a Bruner y la paradoja de Zenón, la historia de Aquiles y la tortuga, que según él es accesible a los pequeños -si aceptamos que hay formas diferentes de acceder, a través de diferentes

[3]Por un lado nos referimos al caso -por ejemplo- de la noción de límite en el cálculo. Es conocida la complejidad del concepto y el proceso necesario de maduración para finalmente comprenderlo (aquí podría compararse lo que dicen Lakoff y Nuñez y pensar si hay algún acceso metafórico adecuado). En la escolaridad elemental nos referimos los diferentes conjuntos de números que un estudiante encuentra y que son igualmente difíciles de asimilar

narrativas. Es oportuno señalar que para un matemático esa paradoja tiene una muy simple solución pero que para los filósofos el tema sigue siendo fuente inagotable de problemas complicados. Según Bruner los chicos la consideran una historia 'tonta'.

Pero también podemos indagar si estas diferentes formas de acceder son accesos a la matemática realmente.

Los esfuerzos para adaptar los conocimientos propios de la matemática a las necesidades de los usuarios potenciales (un proceso de transposición didáctica según la *didactique* francesa) producen cambios en los objetos a enseñar que pueden llegar a desvirtuar la 'naturaleza misma' de la matemática. La matemática sólo como 'herramienta a usar' puede no funcionar como matemática, al menos no en el sentido en que lo interpreta la comunidad de práctica.

La diferencia entre la matemática y las ciencias experimentales suele expresarse caracterizando a la matemática como una disciplina lógico-deductiva. El énfasis tiende a comunicar la idea que en matemática no se experimenta, no se investiga sobre las posibles propiedades de un objeto que se contempla. Lo más común es la visión de la matemática como un todo acabado donde los teoremas, producto de la actividad matemática, ya fueron obtenidos siguiendo rigurosas reglas y no mucho más puede hacerse con ellos salvo usarlos en las formas prescriptas, de acuerdo con las indicaciones. Lo que falta en esta visión es la noción de matematización, la interpretación matemática de fenómenos no matemáticos, el planteamiento de un problema matemático a partir de esa interpretación, su solución matemática y la interpretación de esa solución como solución posible del fenómeno inicial. Este tipo de actividad, cuando es realizada por un profesional de las ciencias naturales o sociales, establece una particular relación entre el científico y la matemática. Esa relación es un aspecto de la 'matemática para las ciencias' que mencionamos antes. Esto destaca las dificultades para producir una tal matemática. Es el problema que preocupa a Wu aunque no lo plantea así. Ocurre que la comunidad matemática establece otra relación con la matemática, distinta; los problemas de adaptación son justificadamente duros.

Podemos intentar usar la frase de Schoenfeld de 'aprender a pensar matemáticamente' y tratar de ver si esto ayuda a integrar nociones tan divorciadas como matemática para matemáticos y 'la otra', para no-matemáticos. Notemos que esencialmente hablamos de la enseñanza y del aprendizaje, al menos en el contexto de estas reflexiones. Aprender a pensar matemáticamente significa en primer lugar desarrollar un punto de vista matemático, es decir valorar los procesos de matematización y abstracción y tender a aplicarlos. En segundo lugar es necesario aprender a usar las herramientas del oficio y usarlas para entender la estructura - la búsqueda y construcción de sentido matemático.

Lo que nos interesa de esto es que abarca tanto la llamada matemática pura como la matemática aplicada. En un caso se trata de estudiar sistemas definidos axiomáticamente, tratar de determinar por la observación y la experimentación principios y regularidades; en el otro caso se trata de lo que describimos como matematización: modelos de sistemas abstraídos de objetos del mundo real. También sabemos cuales son las herramientas: la abstracción, la representación simbólica y la manipulación simbólica. Estas son herramientas que adquieren un sentido cuando se utilizan. Mucha enseñanza de la matemática pone el acento en estas herramientas y en nada más. La importancia de la manipulación simbólica tiende a exagerarse y tiende a confundirse con la matemática. La identificación de la matemática con el cálculo, con las cuentas, es una consecuencia.

Steen, en un conocido trabajo de 1988, plantea una parte del origen del problema:

"Mucha gente educada, especialmente científicos e ingenieros, cultivan una imagen de la matemática como si fuese un árbol del conocimiento: fórmulas, teoremas y resultados cuelgan como frutas maduras para ser arrancadas por los científicos que pasan, para nutrir sus teorías. Los matemáticos en cambio, ven su área como una selva tropical que crece rápidamente, alimentada y moldeada por fuerzas fuera de la matemática mientras contribuyen a la civilización humana con una rica y siempre renovada flora y fauna intelectual. Estas diferencias en percepción se deben primariamente al empinado y rudo terreno de lenguaje abstracto que separa la selva tropical de la matemática del dominio de la actividad humana ordinaria.”

Esta cita nos interesa aquí porque describe algún aspecto de la relación con la matemática que mencionamos. Las diferencias de percepción se atribuyen al lenguaje de la matemática.

La imagen que se propone ahora, de acuerdo con Schoenfeld, es la matemática como una ciencia casi empírica cuya actividad tiene parecidos con las ciencias naturales. Esto permitiría moverse en búsqueda de alguna solución para los problemas que indicamos. Se trata de mejorar la relación con la matemática -en el sentido que describimos aquí- en el ámbito de la enseñanza. Es decir mejorar ‘todas las matemáticas’.

Humberto Alagia:Facultad de Matemática, Astronomía y Física, FaMAF. Universidad Nacional de Córdoba, (5100) Córdoba, Argentina

E-mail address: `alagia@famaf.edu`